Aufgabe 1
Für eine Simulationsrechnung werden Zufallszahlen Y benötigt mit Studentverteilung mit 1 Freiheitsgrad. Man berechne sie mit Hilfe der Inversionsmethode unter Verwendung von folgenden Zufallszahlen X mit gleichmäßiger Verteilung in [0 , 1] : 0.65652, 0.76571, 0.68686, 0.08462, 0.12896, 0.36576

Aufgabe 2
Für eine Simulationsrechnung werden Zufallszahlen Y benötigt mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$g(y) = \begin{cases} 30y^2(1-y)^2 & \text{für } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es stehen Zufallszahlen X mit gleichmäßiger Verteilung in [0, 1] zur Verfügung. Wählen Sie ein geeignetes Verfahren aus und berechnen Sie Zufallszahlen Y unter Verwendung von folgenden Zufallszahlen X:
0.96106 , 0.68764 , 0.37995 , 0.81604 , 0.33628 , 0.17364 , 0.01409 , 0.87803 , 0.87331 , 0.82442
0.28104 , 0.26432 , 0.17323 , 0.84728 , 0.65641 , 0.33433

Aufgabe 3
Ein normalverteilter Produktionsprozeß soll mit Hilfe von Zufallszahlen X auf einem Rechner simuliert werden. Der Produktionsprozeß soll den Erwartungswert 60 und die Standardabweichung 3 haben. Der Rechner kann Pseudozufallszahlen Z liefern mit gleichmäßiger Verteilung in [0,1]. Berechnen Sie für folgende Zufallszahlen Z simulierte Produktionswerte X:
0.26128, 0.47648, 0.87331, 0.82442, 0.60713, 0.49488, 0.28104, 0.26432, 0.83640, 0.17323, 0.49557, 0.15943

Aufgabe 4
X_1 und X_2 sind zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei X_1 eine Erlang-Verteilung hat mit Parametern $\lambda = 10^{-4}h^{-1}$ und k=2. X2 hat eine Exponentialverteilung mit gleichem Parameter λ. Man berechne die Dichtefunktion von $Y=X_1+X_2$

Aufgabe 5
Aus einer normalverteilten Gesamtheit mit Parametern $\mu = 60$ und $\sigma = 2$ wird eine Stichprobe von n = 12 Stück entnommen: $X_1, X_2, ..., X_n$

a) Wie groß ist $V(X_i)$? b) Was für eine Verteilung hat $\overline{X}$?

c) Was für eine Verteilung hat

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

d) Was für eine Verteilung hat

$$Z = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

Aufgabe 1)

Dichtefunktion der Studentverteilung mit 1 Freiheitsgrad:

$$h(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

Verteilungsfunktion:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} h(z)\, dz = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

durch Blick in die Formelsammlung:

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\arctan z\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\arctan t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \arctan t + \frac{1}{2}$$

Inversionsmethode:

$$X = \frac{1}{\pi} \arctan Y + \frac{1}{2}$$ invertieren

$$X - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \arctan Y$$

$$\pi\left(X - \frac{1}{2}\right) = \arctan Y$$

$$Y = \tan\left(\pi\left(X - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$Y_1 = \tan\left(\pi\left(0{,}65652 - \frac{1}{2}\right)\right) = 0{,}5356022$$

$$Y_2 = \tan\left(\pi\left(0{,}76571 - \frac{1}{2}\right)\right) = 1{,}1039223$$

$$Y_3 = \tan\left(\pi\left(0{,}68686 - \frac{1}{2}\right)\right) = 0{,}6652742$$

$$Y_4 = \tan\left(\pi\left(0{,}08462 - \frac{1}{2}\right)\right) = -3{,}6726047$$

$$Y_5 = \tan\left(\pi\left(0{,}12896 - \frac{1}{2}\right)\right) = -2{,}331736$$

$$Y_6 = \tan\left(\pi\left(0{,}36576 - \frac{1}{2}\right)\right) = -0{,}448646$$

Aufgabe 2)

Wir wählen die Rückweisungsmethode

$$Z_1 = (b-a)X_1 + a = (1-0)X_1 + 0 = X_1$$

$$Z_2 = cX_2 \qquad \text{mit } c \geq \max(g(Y))$$

$$g(Y) = \begin{cases} 30y^2 \cdot (1-2y+y^2) & \text{für } 0 \leq Y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(Y) = \begin{cases} 30y^2 - 60y^3 + 30y^4 & \text{für } 0 \leq Y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g'(Y) = \begin{cases} 60y - 180y^2 + 120y^3 & \text{für } 0 \leq Y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$60y - 180y^2 + 120y^3 = 0$$

$\rightsquigarrow Y_1 = 0$ (muss Minimum sein, da $g(Y) \geq 0$ und $g(0) = 0$)

$$120y^2 - 180y + 60 = 0$$

$$y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

$$Y_{2,3} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$Y_2 = \frac{1}{2}$ natürlich Maximum

$Y_3 = 1$ natürlich Minimum

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{30}{4} - \frac{60}{8} + \frac{30}{16}$$

$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{30}{16}$ wir wählen $c = 2$

Aufgabe 3:

Zur Erzeugung von Zufallszahlen mit der Standardnormalverteilung haben wir die direkte Methode verwendet.

$\mu = E(x) = 60$

$\sigma = \sigma(x) = 3$

$Y_1 = (-2 \cdot \ln(z_1))^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(2\pi \cdot z_2)$

$Y_2 = (-2 \cdot \ln(z_1))^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(2\pi \cdot z_2)$

$X_1 = \sigma \cdot Y_1 + \mu$

$X_2 = \sigma \cdot Y_2 + \mu$

z_1	z_2	Y_1	Y_2	X_1	X_2
0.26128	0.47648	-1.62053	0.24124	55.13841	60.72372
0.87331	0.82442	0.23461	-0.46463	60.70383	58.60611
0.60713	0.49488	-0.99849	0.03213	57.00453	60.09639
0.25107	0.26432	-0.14316	1.58683	59.57052	64.76049
0.83640	0.17323	0.27728	0.52954	60.83184	61.58862
0.49557	0.15943	0.63850	0.99820	61.9155	62.9946

γ^2

Aufgabe 4)

Dichtefunktion der Erlangverteilung:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda x_1} x_1^{k-1} & \text{für } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Beispiel

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \lambda^2 x_1 e^{-\lambda x_1} & \text{für } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichtefunktion der Exponentialverteilung:

$$f_2(x_2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_2} & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Faltung der Dichten

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(y-x_1)\, dx_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_1(x_1)}_{0} \cdot f_2(y-x_1)\, dx_1}_{0} + \int_{0}^{\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(y-x_1)\, dx_1$$

$$= \int_0^y \underbrace{f_1(x_1)}_{\lambda^2 x_1 e^{-\lambda x_1}} \cdot \underbrace{f_2(y-x_1)}_{\lambda e^{-\lambda(y-x_1)}}\, dx_1 + \underbrace{\int_y^{\infty} f_1(x_1) \cdot \underbrace{f_2(y-x_1)}_{0}\, dx_1}_{0}$$

$$= \lambda^3 \int_0^y x_1 e^{-\lambda x_1 - \lambda y + \lambda x_1}\, dx_1 = \lambda^3 \int_0^y x_1 e^{-\lambda y}\, dx_1$$

$$= \lambda^3 e^{-\lambda y} \int_0^y x_1\, dx = \lambda^3 e^{-\lambda y} \left[\tfrac{1}{2} x_1^2\right]_0^y = \lambda^3 e^{-\lambda y} \left(\tfrac{1}{2} y^2 - 0\right)$$

$$\underline{\underline{g(y) = \frac{\lambda^3}{2} e^{-\lambda y} y^2}}$$

für $y \geq 0$

γ

Aufgabe 5:

a) $V(X_i) = \sigma^2 = 2^2 = 4$

b) $\bar{X}$ hat eine Standardnormalverteilung mit

$\mu_{\bar{X}} = \mu = 60$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = 0.57735$

c) $Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

hat eine χ^2-Verteilung mit

$(n-1)$ Freiheitsgraden

d) $Z = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

hat eine χ^2-Verteilung mit

n Freiheitsgraden