Aufgabe 1

Bei einer Produktion ergaben sich an 10 Tagen folgende Produktionsmengen:

91, 81, 104, 94, 81, 92, 87, 97, 89, 85

Es sei vorausgesetzt, daß die Produktionsmenge normalverteilt ist, und die obigen Daten eine repräsentative Stichprobe darstellen.

a) Man bestimme ein 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Produktionsmenge.

b) Wie ändert sich das 95%-Konfidenzintervall, wenn zusätzlich davon ausgegangen werden kann, daß die Standardabweichung 7 Mengeneinheiten beträgt?

Aufgabe 2

Zur Ermittlung der Meßgenauigkeit einer Waage wird ein Eichkörper von genau 5 g verwendet. Der Eichkörper wird 10 mal auf die Waage gelegt und jeweils nach dem Ausschwingen der Waage wird die Gewichtsanzeige abgelesen. Es ergeben sich folgende Meßwerte in mg:

5001.7, 4999.6, 5000.8, 4997.5, 4996.7, 4997.1, 4999.7, 5002.1, 4999.5, 5002.5

Es ist bekannt, daß die Waage keinen systematischen, sondern nur zufällige Meßfehler aufweist. Die zufälligen Meßfehler sind normalverteilt.

a) Durch welchen Parameter kann die Meßgenauigkeit gekennzeichnet werden?

b) Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für diesen Parameter.

c) Wie würde sich das Konfidenzintervall ändern, wenn das genaue Gewicht des Eichkörpers unbekannt wäre?

Aufgabe 3

Auf einer Maschine werden Spulen hergestellt. Aus früheren Messungen ist bekannt, daß die Induktivität der Spulen normalverteilt ist mit Erwartungswert 250 mH und Standardabweichung 3 mH. Nach Behebung eines Defektes an dieser Maschine taucht die Vermutung auf, daß sich infolge der Reparaturmaßnahme der Erwartungswert verkleinert haben könnte. Diese Vermutung soll durch einen Test untersucht werden, wobei davon ausgegangen werden kann, daß die Reparaturmaßnahme keinen Einfluß auf die Standardabweichung der Induktivitäten hatte. (Signifikanzzahl 1%).

a) Man formuliere die Testhypothesen. Was ist die geeignete Prüfgröße für diesen Test? Man bestimme die zugehörige kritische Zahl für einen in Aussicht genommenen Stichprobenumfang von 100 Spulen und erläutere ihre Bedeutung

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß durch den vorgesehenen Test eine eingetretene Verkleinerung des Erwartungswertes auf 248.5 mH nicht entdeckt wird?

c) Man erkläre an diesem Beispiel die Begriffe Fehler 1. und 2. Art.

Aufgabe 4

In einer Milchabfüllanlage werden Einliterbeutel automatisch abgefüllt und verschlossen. Der Inhalt an Milch ist normalverteilt mit einer Standardabweichung $\sigma = 0.01$ l. Durch eine Änderung an der Abfüllanlage soll die Standardabweichung verkleinert werden. Nach Ausführung der Änderung wurden bei einer Stichprobe von 20 Milchbeuteln folgende Inhalte festgestellt (in ml):

1029, 1033, 1026, 1042, 1032, 1029, 1029, 1035, 1039, 1028,
1031, 1030, 1023, 1031, 1028, 1033, 1027, 1023, 1016, 1031

a) Man teste, ob sich durch die Änderung die Standardabweichung verkleinert hat (Signifikanzzahl 5%)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem solchen Test eine eingetretene Halbierung der Standardabweichung unentdeckt bleibt?

Aufgabe 5

Aus einer normalverteilten Produktion von elektrischen Widerständen soll von zwei verschiedenen Mitarbeitern unabhängig voneinander jeweils eine Stichprobe von Widerständen entnommen und die Stichprobenvarianz berechnet werden. Mitarbeiter I soll eine Stichprobe von 16 Widerständen entnehmen, Mitarbeiter II von 25 Widerständen. Um ihre Ergebnisse zu vergleichen, beabsichtigen die Mitarbeiter, das Verhältnis der beiden Stichprobenvarianzen $V = S_1^2/S_2^2$ zu bilden.

a) Was für eine Verteilung hat die Zufallsvariable V?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable V den Wert 2.5 überschreitet?

Aufgabe 1)

a) $$\left[\bar{x} - t_{\frac{1}{2}(1+\gamma);n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{\frac{1}{2}(1+\gamma);n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 90{,}1$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = 7{,}17$$

$$t_{0{,}975;9} = 2{,}26$$

$$\left[90{,}1 - 2{,}26 \cdot \frac{7{,}17}{\sqrt{10}} ; 90{,}1 + 2{,}26 \cdot \frac{7{,}17}{\sqrt{10}}\right] = [84{,}98 ; 95{,}22]$$

$\rightsquigarrow$ [84; 96] da Stückzahlen

es müssen keine ganzzahligen Stückzahlen sein!

b) $$\left[\bar{x} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$c = 1{,}960$$

$$\left[90{,}1 - 1{,}960 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} ; 90{,}1 + 1{,}960 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}\right]$$

$[85{,}76 ; 94{,}44] \rightsquigarrow$ [85; 95] da Stückzahlen

μ

Aufgabe 2)

a) σ

b) $$\left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{c_2}} ; \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{c_1}}\right]$$

$$c_1 = \chi^2_{\frac{1}{2}(1-\gamma);n} = \chi^2_{\frac{1}{2}(1-0{,}95);10} = \chi^2_{0{,}025;10} = 3{,}25$$

$$c_2 = \chi^2_{\frac{1}{2}(1+\gamma);n} = \chi^2_{\frac{1}{2}(1+0{,}95);10} = \chi^2_{0{,}975;10} = 20{,}48$$

$$\mu = 5000$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_i - 5000)^2 = 40{,}24$$

$$\left[\sqrt{\frac{40{,}24}{20{,}48}} ; \sqrt{\frac{40{,}24}{3{,}25}}\right]$$

$$[1{,}40 ; 3{,}52]$$

c) $\left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{c_2'}} ; \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{c_1'}}\right]$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 4999{,}72$$

$$c_1' = \chi^2_{\frac{1}{2}(1-\gamma);n-1} = \chi^2_{\frac{1}{2}(1-0{,}95);9} = \chi^2_{0{,}025;9} = 2{,}70$$

$$c_2' = \chi^2_{\frac{1}{2}(1+\gamma);n-1} = \chi^2_{\frac{1}{2}(1+0{,}95);9} = \chi^2_{0{,}975;9} = 19{,}02$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_i - 4999{,}72)^2 = 39{,}456$$

$$\left[\sqrt{\frac{39{,}456}{19{,}02}} ; \sqrt{\frac{39{,}456}{2{,}70}}\right]$$

$$[1{,}44 ; 3{,}82]$$

Aufgabe 3)

a) $H_0: \mu = \mu_0 \quad (\mu = 250\,mH)$

$A: \mu < \mu_0 \quad (\mu < 250\,mH)$

Geeignete Prüfgröße: $\overline{X}$

$c = \mu_0 + W_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 250 + W_{0,01} \cdot \frac{3}{\sqrt{100}}$

$W_{0,01} = -2,326$

$c = 250 - 2,326 \cdot \frac{3}{10} = 249,30$

Wenn $\overline{x} < 249,30$ ist, wird H_0 verworfen

b) $250 - 3\lambda = 248,5$

$3\lambda = 1,5$

$\lambda = 0,5$

$\beta(0,5) = \Phi(W_{1-\alpha} - \lambda\sqrt{n}) = \Phi(2,326 - 0,5\sqrt{100})$

$= \Phi(-2,674)$

$= 0,0038$

$= \underline{\underline{0,38\,\%}}$

c) Fehler 1. Art: H_0 wird verworfen, obwohl H_0 zutrifft

Es wird z.B. ein $\overline{x}$ von 249 mH gemessen, obwohl μ unverändert gleich 250 mH ist.

zu c) Fehler 2. Art: H_0 wird nicht verworfen, obwohl H_0 nicht zutrifft.

Es wird z.B. ein $\overline{X}$ von 249,5 mH gemessen, obwohl μ auf 248,5 mH gesunken ist

Aufgabe 4)

a) $H_0: \quad \sigma = \sigma_0 \quad (\sigma = 10mL)$

$A: \quad \sigma < \sigma_0 \quad (\sigma < 10mL)$

Prüfgröße: $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$

$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 1029,74$

$S = 5,64$

$\alpha = 5\%$

$c = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha;n-1}}{n-1}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{\chi^2_{0,05;19}}{19}}$

$= 10 \cdot \sqrt{\frac{10,12}{19}} = 10 \cdot 0,7298$

$c = 7,298$

Da $S < c$ $(5,64 < 7,298)$ ist, ist H_0 zu verwerfen.

b) $\beta(\lambda) = 1 - F\left(\frac{\chi^2_{\alpha;n-1}}{\lambda^2}\right) = 1 - F\left(\frac{10,12}{0,25}\right) = 1 - F(40,48)$

durch Interpolation:

$\approx 1 - 0,9965 = 0,0035 = 0,35\%$

Eine Halbierung der Standardabweichung würde mit 0,35%iger Wahrscheinlichkeit nicht entdeckt.

Aufgabe 5)

a) F-Verteilung mit 15 und 24 Freiheitsgraden ✓ Begründung fehlt! Nachbessern

b) $P(V > 2{,}5) = 1 - P(V \leq 2{,}5) = 1 - F_{15;24}(2{,}5)$

$F_{15;24}(2{,}11) = 0{,}95$

$F_{15;24}(2{,}89) = 0{,}99$

durch Interpolation:

$F_{15;24}(2{,}5) = 0{,}97$

$P(V > 2{,}5) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$

$P(V > 2{,}5) = \underline{\underline{3\,\%}}$

✓

Verbesserung

Aufgabe 5 a)

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$ ist χ^2-Verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$\curvearrowright \quad \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$$ ist ebenfalls χ^2-Verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

$$\curvearrowright \quad \frac{\frac{\frac{(m-1) \cdot S_1^2}{\sigma^2}}{(m-1)}}{\frac{\frac{(n-1) \cdot S_2^2}{\sigma^2}}{(n-1)}}$$ ist F-Verteilt mit (m, n) Freiheitsgraden

$$= \frac{\frac{S_1^2}{\sigma^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$ ist also auch F-Verteilt mit (m, n) Freiheitsgraden