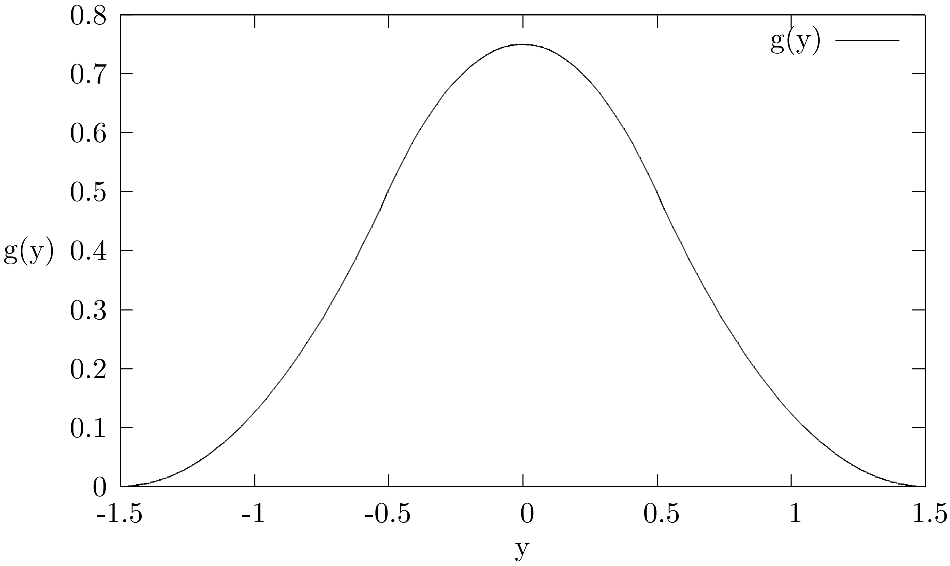
1 Aufgabe

(a) Berechnen der Dichte

Skizze der Dichtefunktion:



$$
\begin{aligned}
G(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(X - \frac{3}{2} \leq y) \\
&= P(X \leq y + \frac{3}{2})
\end{aligned}
$$

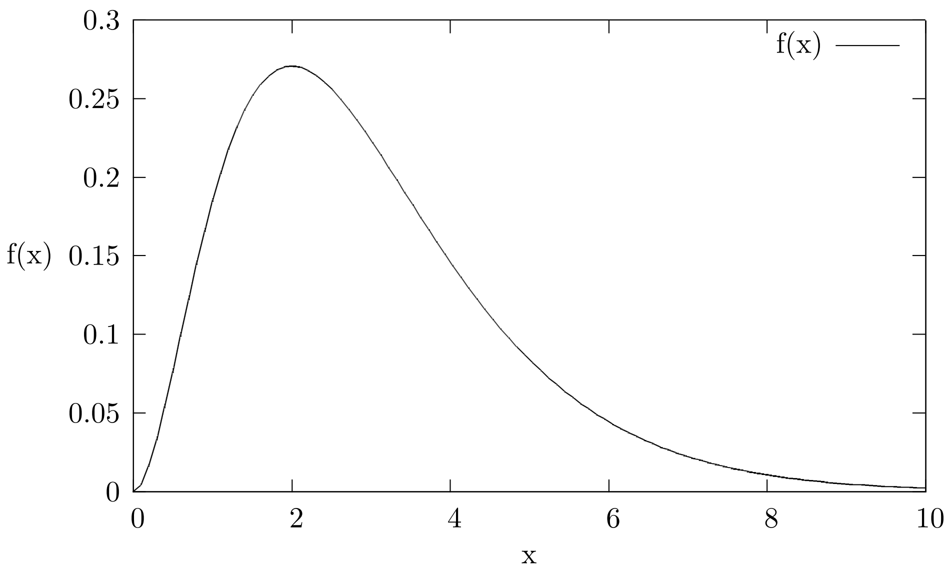
$$
g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y+\frac{3}{2})^2, & \text{für } -\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2} \\ -y^2 + \frac{3}{4}, & \text{für } -\frac{1}{2} < y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(y^2 - 3y + \frac{9}{4}), & \text{für } \frac{1}{2} < y \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
$$

(b) Berechnen des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(y^3 + 3y^2 + \frac{9}{4}y\right) \quad \mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -y^3 + \frac{3}{4}y \quad \mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}(y^3 - 3y^2 + \frac{9}{4}y) \quad \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4}y^4 + y^3 + \frac{9}{8}y^2\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{4}y^4 + \frac{3}{8}y^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4}y^4 - y^3 + \frac{9}{8}y^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} \\
&= 0
\end{aligned}$$

2 Aufgabe

Skizze der Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}x^2$ *für* $x \geq 0$



Berechnen des Erwartungswertes:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} x^3 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-e^{-x} x^3 + 3 \cdot \int_0^\infty e^{-x} x^2 \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-e^{-x} x^3 + 3 \cdot \left(-e^{-x} x^2 + 2 \cdot \int_0^\infty e^{-x} x \mathrm{d}x \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(-e^{-x} x^3 + 3 \cdot \left(-e^{-x} x^2 + 2 \cdot \left(-e^{-x} x + \int_0^\infty e^{-x} x \mathrm{d}x \right) \right) \right) \\
&= \left[-e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 3x + 3 \right) \right]_0^\infty \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Berechnen von μ_2:

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= E\left[(X - E(X))^2 \right] \\
&= \int_0^\infty (x - E(X))^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty (x - 3)^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty (x^2 - 6x + 9) \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x - 6 \cdot \int_0^\infty x f(x)\mathrm{d}x + 9 \cdot \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x - 6 \cdot E(X) + 9 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-x} x^4 \mathrm{d}x - 9 \\
&\vdots \\
&= \left[-e^{-x} \left(\frac{1}{4} x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 12x + 12 \right) \right]_0^\infty - 9 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Berechnen von μ_3:

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= E\left[(X - E(X))^3\right] \\
&= \int_0^\infty (x - E(X))^3 \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty (x - 3)^3 \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x^3 f(x)\mathrm{d}x - 9 \cdot \int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x + 27 \cdot \int_0^\infty x f(x)\mathrm{d}x - 27 \cdot \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x^3 f(x)\mathrm{d}x - 9 \cdot E(X^2) + 27 \cdot E(X) - 27 \\
&= \int_0^\infty x^3 f(x)\mathrm{d}x - 54 \\
&\vdots \\
&= \left[-e^{-x} \cdots \left(\frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^4 - 10x^3 - 30x^2 - 60x - 60\right)\right]_0^\infty - 54 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Berechnen der Schiefe der Verteilung:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\mu_3}{\sqrt[2]{\mu_2^3}} \\
&= \frac{6}{\sqrt[2]{3^3}} \\
&= 1.1547 \\
&\Rightarrow \text{Die Verteilung ist linksschief}
\end{aligned}$$

3 Aufgabe

Stichprobenmittel:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= \frac{1}{16}(52.0 + 49.4 + 47.8 + 47.8 + 49.4 + 44.0 + 50.6 + 45.8 \\
&\quad +47.9 + 57.7 + 51.8 + 46.1 + 50.7 + 48.7 + 53.3 + 49.4) \\
&= 49.525
\end{aligned}$$

Stichprobenstandartabweichung:

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{15} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - 49.525)^2} \\
&= 3.2697
\end{aligned}$$

4 Aufgabe

(a) *Bestimmung des Parameters u mittels* $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty u^2 x^2 e^{-ux} \mathrm{d}x \\
&= u^2 \cdot (-\frac{1}{u} x^2 e^{-ux} + \frac{2}{u} \cdot \int_0^\infty x e^{-ux} \mathrm{d}x) \\
&= u^2 \cdot \left(-\frac{1}{u} x^2 e^{-ux} - \frac{2}{u} \cdot (\frac{1}{u} x e^{-ux} + \frac{1}{u^2} e^{-ux}) \right) \\
&= -u x^2 e^{-ux} - 2x e^{-ux} - \frac{2}{u} e^{-ux} \\
&= -e^{-ux} \cdot (u x^2 + 2x + \frac{2}{u}) \\
&= \left[-e^{-ux} \cdot (u x^2 + 2x + \frac{2}{u}) \right]_0^\infty \\
&= \frac{2}{u} \\
&\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{2}{\hat{u}} \\
&\Rightarrow \quad \hat{u} = \frac{2}{\bar{x}}
\end{aligned}$$

(b) *Brechnen von $\bar{x}$:*

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i \\ &= 6.668\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{2}{\bar{x}} \\ &= \frac{2}{6.668} \\ &= 0.29994\end{aligned}$$

5 Aufgabe

Gleichmäßige Verteilung in [0,1]

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ x, & \text{Für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}G(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^3 \leq y) \\ &= P(X \leq y^{\frac{1}{3}}) \\ &= F(y^{\frac{1}{3}})\end{aligned}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{für } y < 0 \\ y^{\frac{1}{3}}, & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{für } y > 1 \end{cases}$$

Dichtefunktion:

$$\begin{aligned} g(y) &= (F(y))' \\ &= f(y) \cdot y' \\ &= f(y^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{für } y^{\frac{1}{3}} > 1 \\ \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}, & \text{für } 0 < y^{\frac{1}{3}} \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungwert:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 y^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$