1 Aufgabe

a.) *Bestimmung des Mittelwerts*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i \\ &= 90.1\end{aligned}$$

Bestimmung der Standartabweichung

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (X_i - 90.1)^2} \\ &= 7.17\end{aligned}$$

Wert der Studentverteilung bei 95% *und 9-Freiheitsgraden*

$$\begin{aligned}t &= t_{\frac{1}{2}(1+\gamma);9} \\ &= t_{97.5;9} \\ &= 2.26\end{aligned}$$

Berechung des Konfidenzintervalls für μ

$$[\bar{X} - t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}]$$
$$[90.1 - 2.26 \cdot \frac{7.17}{\sqrt{10}}, 90.1 + 2.26 \cdot \frac{7.17}{\sqrt{10}}]$$
$$[90.1 - 5.12, 90.1 + 5.12]$$
$$[84.97, 95.22]$$

$[84.97, 95.22]$ ist das 95% Konfidenzintervall für den unbekannten Paramter μ bei unbekanntem σ.

b.)*Berechnung des Konfidenzintervalls bei bekanntem Parameter* σ

$$\begin{aligned}P(\bar{X} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq & \quad \mu \quad \leq \bar{X} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 95\% \\ P(90.1 - 1.960 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} \leq & \quad \mu \quad \leq 90.1 - 1.960 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}) \\ P(85.76 \leq & \quad \mu \quad \leq 94.44)\end{aligned}$$

$[85.76, 94.44]$ ist das 95% Konfidenzintervall für den unbekannten Paramter μ mit $\sigma = 7$.

2 Aufgabe

a.) Der Paramter σ gibt die Messgenauigkeit des Gerätes an.

b.)*Bestimmung der beiden Konstanten C_1 und C_2*

$$\begin{aligned} P(C_1 \leq Y \leq C_2) &= \mu \\ P(Y \leq C_1) &= \frac{1}{2}(1-\gamma) \\ P(Y \leq C_2) &= \frac{1}{2}(1+\gamma) \end{aligned}$$

für eine χ^2-Verteilung mit 10-Freiheitsgraden und $\mu = 95\%$

$$\begin{aligned} P(Y \leq C_1) &= 0.025 \\ F(C_1) &= 0.025 \\ C_1 &= 3.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y \leq C_2) &= 0.975 \\ F(C_2) &= 0.975 \\ C_2 &= 20.48 \end{aligned}$$

$$P(3.25 \leq Y \leq 20.48) = 95\%$$

$$\begin{array}{rcl} P(C_1 \leq & Y & \leq C_2) \\ P(C_1 \leq & \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2 & \leq C_2) \\ P(\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2}{C_2}} \leq & \sigma & \leq \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2}{C_1}}) \\ P(\sqrt{\dfrac{40.24}{20.48}} \leq & \sigma & \leq \sqrt{\dfrac{40.24}{3.25}}) \\ P(1.401 \leq & \sigma & \leq 3.518) \end{array}$$

$[1.401, 3.518]$ ist ein 95% Konfidenzintervall für den Paramter σ.

c.) *Berechnen von $\bar{X}$*

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i \\ &= 4999.72 \end{aligned}$$

Brechnen des neuen Konfidenzintervalls für eine χ^2-Verteilung mit 9-Freiheitsgraden und $\mu = 95\%$

$$\begin{aligned} P(Y \leq C_1) &= 0.025 \\ F(C_1) &= 0.025 \\ C_1 &= 2.70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y \leq C_2) &= 0.975 \\ F(C_2) &= 0.975 \\ C_2 &= 19.02 \end{aligned}$$

$$P(2.70 \leq Y \leq 19.02) = 95\%$$

$$\begin{array}{rcl} P(C_1 \leq & Y & \leq C_2) \\ P(C_1 \leq & \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2 & \leq C_2) \\ P(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2}{C_2}} \leq & \sigma & \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2}{C_1}}) \\ P(\sqrt{\frac{39.456}{19.02}} \leq & \sigma & \leq \sqrt{\frac{39.456}{2.70}}) \\ P(1.440 \leq & \sigma & \leq 3.823) \end{array}$$

$[1.440, 3.823]$ ist ein 95% Konfidenzintervall für den Paramter σ, bei unbekanntem Parameter μ.

3 Aufgabe

a.) *Testhypothese:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 250mH \\ A &: \mu < 250mH \end{aligned}$$

Geeignete Prüfgröße ist $\bar{X}$

Bestimmung der kritischen Zahl C

$$\begin{aligned}
P(\bar{X} < C|H_0) &= 1\% \\
\Phi\left(\frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) &= 1\% \\
\frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} &= -2.326 \\
C &= -2.326 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + 250mH \\
C &= 249.30mH
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(\gamma) &= P(\bar{X} \geq C \quad | \quad A) \\
&= 1 - P(\bar{X} < C \quad | \quad A) \\
&= 1 - P(\bar{X} < C \quad | \quad \mu = \mu_0 - \lambda \cdot \sigma) \\
&= 1 - \Phi(W_\alpha + \lambda \cdot \sqrt{n}) \\
&= 1 - \Phi(-W_\alpha + \lambda \cdot \sqrt{n}) \\
&= \Phi(W_\alpha - \lambda \cdot \sqrt{n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu_0 - \lambda \cdot \sigma \\
248.5mH &= 250mH - \lambda \cdot 3mH \\
\lambda &= 0.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(0.5) &= \Phi(2.326 - 0.5 \cdot \sqrt{100}) \\
\beta(0.5) &\approx 0.4\%
\end{aligned}$$

c.)

- Wenn davon ausgegangen wird, dass der Erwartungswert der Maschine schlechter ist als zuvor, obwohl dies nicht zutrifft, bez. man dies als *Fehler 1. Art*.

- Wenn davon ausgegangen wird, dass der Erwartungswert der Maschine nicht verschlechtert hat als zuvor, obwohl diese schlechter wurde, bez. man dies als *Fehler 2. Art*.

4 Aufgabe

a.) *Testhypothese*

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \sigma = \sigma_0 \\
A &: \sigma < \sigma_0
\end{aligned}
$$

Prüfgröße: S

$$
\begin{aligned}
P(S < C \quad | \quad H_0) &= \alpha \\
P\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)\cdot C^2}{\sigma_0^2} \quad | \quad H_0\right) &= \alpha \\
F\left(\frac{(n-1)\cdot C^2}{\sigma_0^2}\right) &= \alpha \\
F\left(\frac{19\cdot C^2}{0.0001}\right) &= 5\% \\
\frac{19\cdot C^2}{0.0001} &= 10.12 \\
C &= 0.00729l
\end{aligned}
$$

Bestimmen von $\bar{X}$ und S

$$
\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{1}{20}\cdot\sum_{i=1}^{20} X_i \\
&= 1029.75ml
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})} \\
&= 5.637ml
\end{aligned}
$$

H_0 wird verworfen, da $S < C$.

b.)

$$
\begin{aligned}
\beta(\lambda) &= P(S \geq C \quad | \quad A) \\
&= P(S \geq C \quad | \quad \sigma < \sigma_0) \\
&= P(S \geq C \quad | \quad \sigma = 0.5 \cdot \sigma_0) \\
&= 1 - P(S < C \quad | \quad \sigma = 0.5 \cdot \sigma_0) \\
&= 1 - F\left(\frac{\chi^2_{5\%;19}}{0.25}\right) \\
&\approx 1 - 99.7\% \\
&\approx 0.3\%
\end{aligned}
$$

5 Aufgabe

a.)

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{S_1^2}{S_2^2} \\
&= \frac{\frac{(n_1-1)\cdot S_1^2}{\sigma^2}}{\frac{(n_2-1)\cdot S_2^2}{\sigma^2}} \\
&= \frac{\chi^2_{\alpha;15}}{\chi^2_{\alpha;24}} \\
&= F_{15;24} \\
&\Rightarrow \text{Fisher-Verteilung mit den Freiheitsgraden 15, 24}
\end{aligned}
$$

b.)

$$
\begin{aligned}
W &= P(V \geq 2.5) \\
&= 1 - P(V < 2.5) \\
&= 1 - F_{15;24}(2.5) \\
&\approx 1 - 97\% \\
&\approx 3\%
\end{aligned}
$$